

## **Problem Posing: Melatih Kemampuan Mahasiswa dalam Membangun Teorema**

Tatag Yuli Eko Siswono  
Jurusan Matematika  
FMIPA UNESA

### **ABSTRAK**

Sebagai calon matematikawan, seorang mahasiswa jurusan matematika perlu mengetahui dan memahami bagaimana menemukan struktur baru matematika atau membangun suatu teorema berdasar aksioma-aksioma yang dipilih. Untuk itu, dosen dalam mengajarkan suatu struktur matematika seharusnya tidak hanya memperkenalkan teorema, tetapi juga melatih cara menemukan dan membangun teorema atau struktur matematika itu. Salah satu cara yang dapat digunakan adalah dengan memberikan tugas pengajuan soal/masalah (problem posing). Untuk mengetahui hasil penerapan tugas itu, maka dilaksanakan penelitian yang menggali kemampuan mahasiswa setelah dilatih cara tersebut, dan mengidentifikasi kesulitan-kesulitan yang dialami.

Untuk mendapatkan data penelitian dilakukan dengan memberikan tugas problem posing yang kemudian dianalisis secara deskriptif.

Hasilnya masih belum memuaskan karena sekitar 58,82% mahasiswa melakukan kesalahan. Kesalahan ini mengindikasikan beberapa kesulitan antara lain dalam memahami informasi (aksioma) yang diberikan, membedakan konsep yang sebenarnya dengan visualisasi sketsa gambar, menyusun kalimat teorema dan membuktikan teorema yang dibangun sendiri.

*Kata kunci: problem posing, teorema, representasi*

### **PENDAHULUAN**

Dalam perkembangan matematika, perubahan mendasar struktur matematika terjadi –salah satunya- ketika aksioma-aksioma dalam geometri Euclid mengalami modifikasi, yaitu pada aksioma kesejajaran. Modifikasi dari aksioma kesejajaran itu mendorong berkembangnya geometri non Euclid yang dikembangkan oleh Janos Bolyai, N. Lobachevsky dan Rieman. Bolyai dan Lobachevsky mengembangkan struktur geometri baru dengan mengganti pernyataan aksioma lima (aksioma kesejajaran) Euclid dengan pernyataan “Dalam bidang datar, jika suatu titik A diluar garis  $\ell$ , maka terdapat lebih dari satu garis yang sejajar dengan garis  $\ell$  melalui titik A itu”. Pernyataan geometri baru ini pertama kali nampak “diragukan kebenarannya”, tetapi pada akhirnya dengan berkembang ilmu Fisika, keterpakaian geometri ini tidak kalah dengan geometri Euclid. Aksioma atau postulat kesejajaran ini dikenal dengan Postulat Kesejajaran Hiperbolik,

sehingga geometrinya dikenal dengan nama Geometri Hiperbolik. Dalam struktur deduktif matematika, aksioma-aksioma hasil kreasi Bolyai dan Lobachevsky ini membangun teorema-teorema yang konsisten dan tidak saling kontradiksi. Kreasi lain dengan mengubah aksioma kesejajaran Euclid dilakukan oleh matematikawan Jerman, Bernhard Riemann. Ia mengganti pernyataan aksioma kesejajaran Euclid dengan pernyataan “jika terdapat garis  $\ell$  dan terdapat titik P diluar garis  $\ell$ , maka tidak ada garis yang melalui P dan sejajar dengan  $\ell$ ”. Aksioma ini dikenal dengan Aksioma Kesejajaran Eliptik, sehingga struktur geometrinya dikenal dengan nama Geometri Eliptik. Berdasar sistem aksioma ini, menurunkan teorema-teorema yang berbeda dengan teorema-teorema dalam Geometri Euclid maupun Geometri Hiperbolik. Salah satu teorema adalah:

Geometri Hiperbolik: Jumlah sudut dalam segitiga kurang dari  $180^\circ$ .

Geometri Euclid : Jumlah sudut dalam segitiga sama dengan  $180^\circ$ .

Geometri Eliptik : Jumlah sudut dalam segitiga lebih besar dari  $180^\circ$ .

(Wallace and West, 1992:62).

Perubahan-perubahan struktur matematika ini pada awalnya merupakan kreasi dari para matematikawan yang tertantang untuk menggali struktur baru atau membuktikan kebenaran-kebenaran dengan cara-cara yang berbeda dari sebelumnya. Kreasi-kreasi ini disadari atau tidak ternyata melahirkan struktur yang berkembang dan berdiri sendiri. Memang tugas utama matematikawan, menurut Bell (1981:289), adalah menciptakan matematika baru dan menemukan hubungan dalam dan antar struktur matematika. Karena validitas temuan-temuan baru dan hubungan-hubungannya harus didemonstrasikan pada masyarakat matematika, maka tugas kedua matematikawan adalah membuktikan teorema-teorema yang dihasilkan. Dari bukti-bukti yang sudah ada kadangkala matematikawan tertantang untuk menemukan cara-cara pembuktian yang berbeda. Contohnya, bukti dari Teorema Phytagoras yang telah dibuktikan lebih dari 100 cara. Modifikasi dan kreasi dari Teorema Phytagoras berkembang dengan usaha untuk menemukan bilangan bulat yang memenuhi  $x^n + y^n = z^n$ , untuk  $n > 2$ . Teorema ini dikenal dengan Teorema Akhir Fermat.

Usaha menemukan dan membangun aksioma atau teorema ini merupakan kegiatan matematikawan yang penting dan harus diajarkan pada calon matematikawan (mahasiswa jurusan Matematika), agar mereka memahami dan dapat melakukan atau

menemukan struktur baru matematika. Dengan demikian tidak ada pertanyaan dari mahasiswa, “Bagaimana para matematikawan menemukan teorema atau teori? Bagaimana asalnya? Apa yang mendorong timbulnya konjektur-konjektur atau perkembangan selanjutnya?”. Apalagi, bagi mahasiswa Jurusan Matematika pada akhir kuliah mereka harus membuat atau menyelesaikan skripsi, yang salah satu bentuknya berupa penyusunan struktur matematika atau membangun suatu teorema berdasar aksioma-aksioma yang dipilih. Oleh karena itu pengajar (dosen) dalam mengajarkan suatu struktur matematika tidak seharusnya hanya memperkenalkan teorema, seperti menarik kelinci dari atas kepala pesulap dan membiarkan mereka bertanya-tanya. Bila mahasiswa dibiarkan bertanya-tanya sehingga tidak puas, akan mengakibatkan motivasi mereka menurun dan melemahkan minatnya terhadap pengembangan matematika. Dosen harus mengajarkan bagaimana menemukan dan membangun teorema atau struktur matematika.

Pertanyaannya adalah bagaimana melatih mereka mengembangkan ketrampilan menemukan teorema (struktur) matematika yang baru? Villiers (1995:1) menganjurkan kegiatan pengajuan soal/masalah (problem posing) atau membuat konjektur-konjektur di kelas, sehingga menantang siswa (mahasiswa) merumuskan pertanyaan-pertanyaannya sendiri dan menyelidikinya. Jantung dari membuat konjektur-konjektur dan pengajuan masalah berada pada kemampuan melihat dan mengajukan pertanyaan dari perspektif yang berbeda. Sebagai contoh, kebiasaan menanyakan pertanyaan seperti “Apakah yang terjadi jika diubah.....?”, “Apa yang terjadi jika .....?” dan “Apakah tidak terjadi .....?” akan mengarahkan pada rumusan-rumusan konjektur atau teorema baru. Seharusnya dijelaskan pada siswa (mahasiswa) bahwa seorang matematikawan yang baik tidak hanya sebagai pemecah masalah yang baik tetapi juga harus sebagai pengaju soal yang kreatif. Tugas seorang matematikawan tidak pernah berhenti, mereka terus melihat kembali soal yang asli atau pemecahannya yang sudah ada dan mengajukan pertanyaan-pertanyaan yang berhubungan dengan soal (masalah) aslinya. Dengan kegiatan ini, berdasar pengalaman Villiers (1995:1), siswa lebih termotivasi karena terlibat dalam membangun teorema-teorema dan mereka dapat membuktikannya. Di samping itu, pengajuan soal (problem posing) memberikan beberapa keuntungan lain, seperti meningkatkan

kemampuan pemecahan masalah, mengaktifkan siswa dan memperkaya konsep-konsep dasar.

Silver dan Cai (1996:292) memberikan istilah pengajuan soal (problem posing) diaplikasikan pada tiga bentuk aktivitas kognitif matematika yang berbeda, yaitu:

- a. Pengajuan pre-solusi (presolution posing) yaitu seorang peserta didik membuat soal dari situasi yang diadakan.
- b. Pengajuan didalam solusi (within-solution posing), yaitu seorang peserta didik merumuskan ulang soal seperti yang telah diselesaikan.
- c. Pengajuan setelah solusi (post solution posing), yaitu seorang peserta didik memodifikasi tujuan atau kondisi soal yang sudah diselesaikan untuk membuat soal yang baru.

Pengajuan soal (problem posing) intinya meminta peserta didik untuk mengajukan soal atau masalah. Latar belakang masalah dapat berdasar topik yang luas, soal yang sudah dikerjakan atau informasi tertentu yang diberikan guru (dosen) terhadap siswa (mahasiswa). Dalam penelitian ini pengajuan soal diartikan sebagai perumusan/pembentukan teorema dari sistem aksioma (informasi) yang disediakan.

Memperhatikan dasar tersebut, tugas pengajuan soal dapat digunakan sebagai alternatif untuk melatih ketrampilan mahasiswa dalam membangun teorema. Tugas tersebut dapat diberikan dalam tugas matakuliah Pengantar Dasar Matematika, karena dalam deskripsi matakuliah itu menjelaskan bahwa matakuliah ini memberikan pemahaman dan pelatihan dalam menyusun pola pikir deduksi dan secara sistematis dan teratur berdasar bahasa dan prinsip Logika dan Himpunan. (Buku Pedoman Unesa, 2000). Dalam perkuliahan isi materi dibagi menjadi 3 bagian, yaitu Aksiomatika Matematika, Himpunan dan Logika. Pada bagian aksiomatika, mahasiswa dapat diajarkan bagaimana menyusun dan mengkonstruksi teorema berdasarkan aksioma-aksioma yang sudah diketahui dan membuktikan kebenaran teorema yang dibangunnya, sehingga sesuai dengan struktur deduktif aksiomatika dalam matematika.

Guna mengetahui bagaimana hasil penerapan pengajuan soal itu, maka perlu dilaksanakan penelitian yang menggali kemampuan mahasiswa setelah dilatih cara tersebut, dan kesulitan-kesulitan apa saja yang dialami mahasiswa.

Berpijak pada latar belakang masalah di atas, maka dirumuskan pertanyaan masalah penelitian sebagai berikut.

- a. Bagaimana kemampuan mahasiswa Jurusan Matematika dalam membangun teorema yang diketahui sistem aksiomanya setelah dilatih dengan cara pengajuan soal?
- b. Kesulitan-kesulitan apa saja yang dialami mahasiswa dalam membangun teorema yang diketahui sistem aksiomanya?

## **METODE PENELITIAN**

Subjek penelitian ini adalah mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA UNESA angkatan 2001 semester genap tahun akademik 2003-2004. Banyaknya responden adalah 34 mahasiswa. Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif yang berusaha mendeskripsikan kemampuan mahasiswa Jurusan Matematika dalam membangun teorema setelah dilatih dengan pemberian tugas pengajuan soal. Langkah penelitiannya adalah :

- 1). Mengajarkan cara pembuatan teorema berdasarkan sistem aksioma yang diketahui. Aksioma-aksioma yang diberikan dalam bidang Geometri Finit, karena sistem aksioma tersebut belum pernah diajarkan, sehingga kemampuan mahasiswa merupakan kemampuan yang sebenarnya dan tidak dipengaruhi oleh kemampuan sebelumnya. (Gemignani, 1968).
- 2). Memberikan tugas pembuatan teorema berdasarkan sistem aksioma yang diketahui.
- 3). Menganalisis tugas pengajuan soal mahasiswa secara deskriptif-kualitatif.
- 4). Penulisan laporan penelitian.

Instrumen pengumpulan data berupa tugas membuat teorema. Tugas tersebut adalah:

Perhatikan sistem aksioma di bawah ini. (di bidang datar).

- (1) terdapat tepat empat titik berbeda dan tidak ada tiga diantaranya yang segaris.
- (2) Melalui tepat dua titik dapat dibuat tepat satu garis lurus.

Buatlah sekurang-kurangnya dua teorema yang dapat diturunkan dari sistem aksioma itu.  
(Boleh dengan mengangkat lebih dahulu definisi tentang tentang konsep tertentu).

## HASIL

Hasil analisis tugas pengajuan masalah (TPM) berupa tugas membuat teorema ditunjukkan dalam tabel berikut.

Tabel 1. Hasil analisis TPM mahasiswa dalam membuat teorema.  
(Semua membuat 2 teorema)

No.	Hasil Tugas Mahasiswa	Banyak Siswa	Persentase
1.	Membuat 2 teorema dengan <i>benar</i> .	14	41,18%
2.	Salah satu dari teorema yang dibuat salah	10	29,42%
3.	Kedua teorema yang dibuat salah.	10	29,42%

Dalam tabel tersebut tampak bahwa sekitar 58,82% mahasiswa masih melakukan kesalahan dalam membuat teorema. Kesalahan-kesalahan itu merupakan indikator bahwa mereka mempunyai kesulitan tertentu dalam membangun teorema. Teorema dikatakan *benar* dalam penelitian ini jika tidak kontradiksi dengan aksioma yang diberikan, dapat dibuktikan atau ditunjukkan kebenarannya berdasar logika dan kalimat teorema tidak menimbulkan penafsiran ganda. Teorema tidak harus ditulis dalam bentuk implikasi.

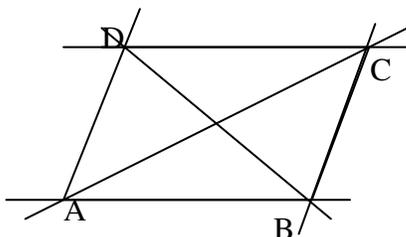
Beberapa contoh teorema yang dibuat dengan benar ditunjukkan berikut. Tanda *M<sub>x</sub>* menunjukkan nama mahasiswa nomor urut ke-*x*.

### *M31*

a. Melalui 4 titik yang berbeda hanya dapat dibuat tepat 6 garis lurus.  
Bukti:

$${}^4P_2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = \frac{12}{2} = 6$$

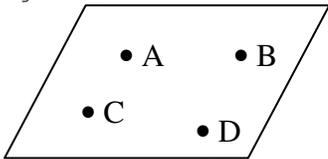
Definisi: dua garis lurus dikatakan sejajar bila tidak memiliki titik serikat, diperpanjang bagaimanapun.



AB//CD, AD//BC, AC//BD. Jadi hanya memiliki 3 pasang garis yang sejajar.

### M33

(a) Ada tepat empat titik dibidang datar dan tidak ada tiga diantaranya yang segaris.



Titik A mempunyai 3 garis  
Titik B mempunyai 2 garis  
Titik C mempunyai 1 garis  
Titik D mempunyai 0 garis  

---

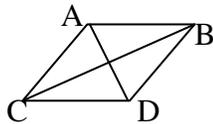
6 garis

Teorema: Didalam bidang datar terdapat tepat empat titik dan tidak ada tiga diantaranya yang segaris didapat 6 garis lurus.

(b) Melalui tepat dua titik berbeda dapat dibuat tepat satu garis lurus. Banyaknya garis lurus yang terjadi adalah satu.



Teorema: Melalui tepat dua titik berbeda dapat dibuat tepat satu garis lurus. Terdapat 3 pasang garis sejajar



Bukti:  
 $AB // CD, AC // BD, AD // BC$

Dalam kelompok pertama ini banyak mahasiswa yang menulis kalimat teorema tidak lengkap atau berlebihan tetapi maknanya masih dapat ditangkap dengan jelas. Beberapa tidak menuliskan definisi kesejajaran dua garis. Makna dua garis sejajar meskipun tidak semua mahasiswa menulis adalah garis-garis yang tidak mempunyai titik serikat.

Terdapat 20 mahasiswa (58,82%) yang mengalami kesalahan dalam membuat teorema. Kesalahan-kesalahan tersebut antara lain:

1. Kesalahan dalam menentukan banyak garis yang dapat dibuat.

Contoh:

### M1

Apabila ada tepat 4 titik dibidang datar dan tidak ada tiga diantaranya yang segaris dan melalui tepat dua titik berbeda pula dapat dibuat tepat satu garis lurus maka banyaknya garis lurus yang mungkin ada adalah 4 garis lurus.

Bukti

$$\begin{aligned}
 {}_4K_3 &= \frac{4!}{3!(4-3)!} \\
 &= \frac{4!}{3!}
 \end{aligned}$$

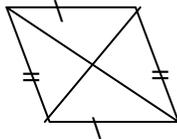
$$\begin{aligned} &= \frac{4 \times 3!}{3!} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Kesalahan ini kemungkinan karena mahasiswa kesulitan dalam membuat sketsa gambar atau tidak memahami sketsa yang dibuatnya. Kemungkinan lain meskipun mereka dapat membuat sketsa gambar, tetapi mereka tidak meyakini perhitungan dari gambar, mereka lebih meyakini secara analitis. Penyebab lain mereka memang tidak memahami konsep dalam kombinasi ( ${}_4K_3$ ) sehingga salah dan tidak memanfaatkan gambar.

2. Kesalahan memahami definisi atau tidak menuliskan definisi dalam struktur yang dibuat.

Contoh:

*M7*



Teorema: banyaknya garis lurus yang terjadi antara empat titik di bidang datar dan tidak ada tiga diantaranya yang segaris yaitu sebanyak 6 garis lurus.

Banyaknya pasangan garis sejajar ada 2 pasang.

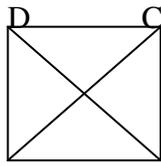
Kemungkinan penyebabnya mereka belum memahami tentang kedudukan definisi dalam struktur aksiomatik atau menganggap definisi tentang kesejajaran sama dengan definisi yang sudah dipahami dalam geometri bidang datar.

3. Tidak menyebutkan/menuliskan teorema, tetapi menuliskan rumus atau penjelasan untuk mendapatkan banyak garis atau garis yang sejajar.

Contoh:

**M5**

Teoremanya adalah



$$C_a^n = \frac{n!}{(n-a)!a!}$$

Bukti A B

Banyaknya garis lurus yang mungkin adalah

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{3 \times 4}{1 \times 2} = \frac{12}{2} = 6$$

Jadi garis lurus yang mungkin adalah 6 garis.

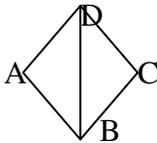
Ada 3 pasang garis sejajar yaitu AB dengan DC, AD dengan BC, AC dengan BD karena pasangan garis ini tidak mempunyai titik persekutuan.

Mahasiswa ini kemungkinan belum mengetahui cara menuliskan teorema atau tidak mengetahui unsur dalam teorema (latarbelakang, hipotesis, dan konsekuensi). Ide dia sebenarnya benar tetapi penulisannya yang belum tepat.

4. Kesalahan menentukan pasangan garis yang sejajar.

Contoh:

**M8**



AD sejajar dengan BC

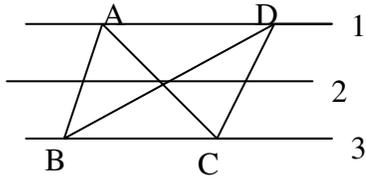
AB sejajar dengan DC berdasarkan aksioma teorema dan definisi-definisi terdapat dua pasang garis sejajar.

Mahasiswa ini masih kesulitan dalam memahami konsep atau informasi yang diberikan. Ia belum dapat mensketsa dengan tepat dan belum mampu membangun teorema berdasarkan system aksioma yang diberikan.

5. Kesalahan dalam memahami aksioma (informasi yang diberikan).

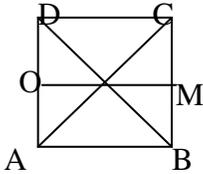
Contoh:

**M16**



Banyaknya garis lurus yang mungkin ada adalah ada tiga garis lurus seperti gambar di samping.

**M20**



Pasangan garis sejajar:

- AB//DC      AC//OM
- BA//OM      BD//OM
- DC//BC      AC//DB

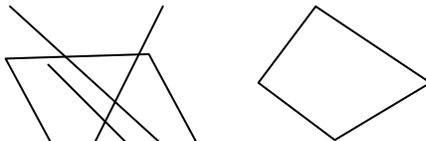
Mahasiswa ini tampak terpengaruh dengan visualisasi sketsa (gambar) yang dibuat dan menambahkan informasi yang tidak sesuai dengan sistem aksioma yang diketahui. Garis “lurus” menurut pemahaman M16 harus lurus horisontal, sehingga garis AB, DC yang miring tidak dalam perhitungannya. M20 menambah garis OM pada sketsanya, padahal titik yang diketahui hanya 4, sehingga sketsa gambar itu sudah tidak sesuai dengan sistem aksioma yang diketahui.

6. Kesalahan dalam mengimplementasikan sketsa yang dibuat atau tidak dapat membedakan antara konsep dengan sketsanya.

Contoh:

**M25**

a)



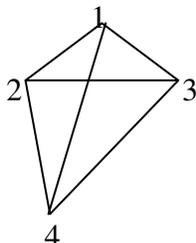
b)



a. teorema tentang banyaknya garis lurus yang mungkin ada adalah 4

b. teorema tentang banyaknya garis lurus yang mungkin ada adalah 1

**M2**



Banyaknya garis lurus yang mungkin ada hanya satu.

Teorema : Dari dua aksioma dapat dinyatakan bahwa banyaknya garis lurus yang mungkin ada hanya 1 yaitu (2,3).

Satu buah garis sejajar yaitu pada titik (1,2) dengan (3,4). Sedangkan pada titik (1,3) dengan (2,4) jika garis yang panjang maka akan menjadi titik pertemuan pada titik (1,2). Selain itu untuk titik (1,4) dengan (2,3) membentuk sebuah perpotongan

M25 kesulitan dalam mengimplementasikan informasi (aksioma) yang diketahui dengan gambar yang dibuatnya. Kemungkinan lain tugas yang diberikan belum dipahami, karena dia hanya memanfaatkan informasi yang diketahui untuk menuliskan teorema pada b. Sedang M2 dapat menggambarkan sketsanya tetapi kesulitan memanfaatkan sketsa itu. Tampaknya “garis lurus” dipahami yang lurus mendatar (2,3), sedang garis yang miring bukan garis lurus. Konsep garis lurusnya dikacaukan dengan sketsa visualnya.

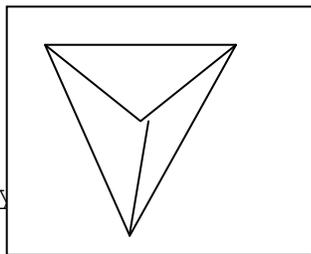
#### 7. Kesalahan dalam membuktikan atau menjelaskan teorema yang dibuat sendiri.

Contoh:

M23

Ada enam garis lurus yang dapat dibuat dari dua titik berbeda pada empat titik yang tidak segaris dalam bidang datar.

Bukti:



Banyaknya garis yang sejajar =  ${}_6C_2$

$$= \frac{6!}{4!2!}$$

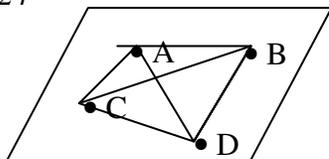
$$= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2} = 15$$

Mahasiswa ini kemungkinan sudah dapat membangun teorema berdasarkan sketsa visualnya, tetapi belum pada aspek analisisnya. Ia kemungkinan kesulitan dalam memahami konsep kombinasi atau tidak memahami informasi (sistem aksioma) yang diberikan.

#### 8. Kesalahan menyusun kalimat teorema.

Contoh:

M24



Teorema ; ada tepat empat titik dibidang datar dan tidak ada tiga diantaranya yang segaris.

Melalui dua titik yang berbeda dapat dibuat enam garis lurus.

Ide teorema sebenarnya sudah dapat ditangkap, hanya susunan kalimat yang dibuat dapat menimbulkan penafsiran berbeda. Apakah melalui dua titik yang berbeda dapat dibuat enam garis lurus? Ia masih kesulitan atau mungkin tidak menyadari kalimat yang dibuatnya. Kemungkinan penyebabnya karena kurang cermat atau tidak memahami susunan kalimat yang tepat dalam suatu teorema.

## **PEMBAHASAN**

Tugas pengajuan masalah ini dapat dipandang sebagai tugas yang menggali representasi mahasiswa terhadap kemampuannya dalam memahami aksioma, menyusun teorema sekaligus membuktikan teorema. Dengan kata lain merupakan tugas yang melatih cara memahami struktur deduktif aksiomatika matematika.

Representasi merupakan gambaran mental hasil proses belajar yang dapat dimengerti dari pengembangan mental yang sudah dimiliki setiap mahasiswa. Hasil tersebut diwujudkan dalam bentuk verbal, gambar atau benda kongkret (Hudojo,2002:427). Representasi eksternal diwujudkan dalam bentuk visual seperti bahasa tertulis, gambar atau benda kongkret. Representasi eksternal tersebut merupakan sarana dalam mengkomunikasikan ide matematika sebagai buah representasi internal (proses berpikir dalam otak).

Tulisan ini masih menekankan pada aspek representasi eksternal dalam mengamati kemampuan siswa dalam menyusun teorema dan mengidentifikasi kelemahan-kelemahannya. Dengan demikian untuk kajian yang mendalam diperlukan identifikasi representasi internal siswa yang ditunjukkan dalam proses berpikirnya.

Dalam tugas tersebut kurang lebih teridentifikasi 8 jenis kesalahan mahasiswa dalam mengajukan teorema. Kesalahan tersebut mengidikasikan kesulitan-kesulitan yang dialami mahasiswa.

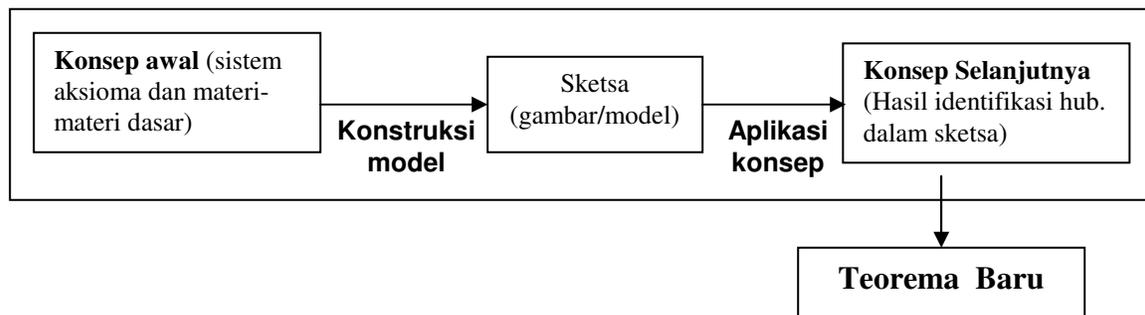
1. Kesalahan dalam menentukan banyak garis yang dapat dibuat. Representasi kesalahan ini menunjukkan kesulitan mahasiswa memahami materi-materi prasyarat (matematika dasar) atau memahami ide matematika dalam sistem aksioma yang diketahui. Bila kesalahan itu karena hasil kombinasi (4K3) yang salah lebih

meyakinkan mahasiswa daripada hasil secara visual dengan sketsa gambar, kemungkinan terdapat kecenderungan mahasiswa ini lebih menggunakan cara berpikir konseptual, yaitu cara berpikir yang mementingkan pengertian akan konsep-konsep dan hubungan-hubungan di antara mereka dan penggunaannya dalam pemecahan masalah. (Marpaung, 1986:25). Pasangan cara ini adalah cara berpikir sekuensial yang berorientasi pada tindakan. Cara ini cenderung untuk langsung menyelesaikan masalah tanpa banyak memberi perhatian terhadap konsep-konsep dan dimulai dari ide yang belum jelas.

2. Kesalahan memahami definisi atau tidak menuliskan definisi dalam struktur yang dibuat. Kesalahan ini bukan karena kekurangcermatan atau kelalaian, tetapi karena *peran definisi* dalam menyusun struktur tersebut tidak diketahui. Mahasiswa beranggapan definisi yang digunakan dalam struktur baru itu sama dengan definisi yang sudah dikenalnya dalam geometri Euclid. Meskipun definisi itu dapat sama, tetapi mengakibatkan fakta-fakta yang berbeda. Misalkan dua garis yang tampak berpotongan pada sketsanya dalam struktur baru dapat dikatakan sejajar, sedang dalam geometri Euclid berpotongan. Fleksibilitas berpikir mahasiswa yang konsisten dan koheren dalam satu struktur dengan struktur yang lain belum tampak. Proses akomodasi dalam pemikiran internal mahasiswa belum berjalan.
3. Tidak menyebutkan/menuliskan teorema, tetapi menuliskan rumus atau penjelasan untuk mendapatkan banyak garis atau garis yang sejajar. Kesalahan ini lebih pada aspek teknis. Perlu pengulangan dalam belajar agar aspek teknis seperti kurang cermat dan salah tulis tidak terjadi.
4. Kesalahan menentukan pasangan garis yang sejajar dan kesalahan dalam memahami aksioma (informasi yang diberikan). Kesalahan ini menunjukkan bahwa informasi yang diketahui (sistem aksioma maupun materi dasar) belum terinternalisasi dalam benak mahasiswa atau belum menjadi skemata-skemata. Mahasiswa masih berada pada tingkat berpikir 0 (visualisasi) atau 1 (analisis/ deskriptik) menurut level berpikir geometri Van Hiele. Pada tingkat berpikir 0 ditunjukkan bahwa kemampuan pebelajar mengidentifikasi atau memanipulasi berdasarkan penampakannya. Sedang tingkat berpikir 1, pebelajar menganalisis hubungan-hubungan dan menemukan sifat-sifat

(aturan-aturan) secara empirik (Sunardi, 2000:37). Ini terlihat dari garis-garis sejajar yang dibuat dalam gambar (sketsa) menunjukkan jawaban yang digunakan mahasiswa, meskipun salah. Untuk mahasiswa paling tidak berada tingkat 3 (deduksi) atau 4 (rigor).

5. Kesalahan penafsiran dari sketsa menjadi konsep atau sebaliknya. Kesalahan ini karena kesulitan mahasiswa dalam menggunakan semua informasi yang diketahui (konsep-konsep) untuk diwujudkan dalam sketsa (gambar) dan selanjutnya sketsa (gambar) yang dibuat digunakan untuk membangun sebuah konsep. Di sini tampak terdapat dua masalah yang muncul, yaitu masalah konstruksi model dan aplikasi konsep. Konstruksi model dapat dipadankan dengan pemodelan dalam pemecahan masalah, sedang aplikasi konsep merupakan kegiatan menggunakan sketsa (model) untuk menurunkan sifat-sifat (aturan-aturan) yang lebih khusus maupun umum. Skema masalah tersebut sebagai berikut.



6. Kesalahan dalam membuktikan atau menjelaskan teorema yang dibuat sendiri. Kesalahan ini menunjukkan kesulitan mahasiswa dalam memilih prosedur atau menentukan langkah pembuktian. Dengan tugas pengajuan masalah ini, ternyata representasi mahasiswa dalam pembuktian yang lemah dapat teridentifikasi, meskipun teorema yang diajukan benar. Dengan demikian tugas ini dapat menjadi sarana refleksi dan evaluasi diri akan kemampuan mahasiswa dalam memahami sebuah teorema.

7. Kesalahan menyusun kalimat teorema. Kesalahan ini pada aspek teknis dalam penyusunan teorema. Bahasa dan matematika merupakan sarana komunikasi, sehingga kesulitan dalam menyusun kalimat akan mengakibatkan kesalahan dalam konsep yang dibangun/dijelaskan. Dengan demikian diperlukan latihan yang berulang-ulang dan kontinu untuk menyusun kalimat yang sebaik-baiknya.

Dalam penelitian yang dilakukan ini masih banyak kelemahan, sehingga perlu ditindaklanjuti maupun diperdalam lagi. Misalkan, tugas diberikan hanya pada satu kali pertemuan dan tidak dipantau secara ketat apakah mahasiswa benar-benar memahami seutuhnya (terinternalisasi). Hasil yang dibuat mahasiswa masih cenderung monoton pada masalah banyaknya garis yang dapat dibuat dan banyak garis yang sejajar. Hasil itu belum menampakkan aspek kreativitas mahasiswa dalam membuat teorema. Padahal secara teoritis pengajuan masalah berkaitan dengan pola kreatif pembuatnya. Penelitian ini juga belum secara khusus meninjau efektivitas pengajuan masalah untuk melatih mahasiswa dalam membangun teorema atau memahami teorema tersendiri, meskipun indikasi positif ke arah itu sudah terlihat.

## **E. SIMPULAN DAN SARAN**

Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa 41,18% mahasiswa dapat membangun teorema yang diminta dan 58,82 % mahasiswa masih melakukan kesalahan. Kesalahan tersebut antara lain dalam menentukan banyak garis yang dapat dibuat, memahami definisi atau tidak menuliskan definisi dalam struktur yang dibuat, tidak menyebutkan/menuliskan teorema, tetapi menuliskan rumus atau penjelasan untuk mendapatkan banyak garis atau garis yang sejajar, tidak memahami aksioma (informasi yang diberikan). Kesalahan lain dalam menentukan pasangan garis yang sejajar, mengimplementasikan sketsa yang dibuat atau tidak dapat membedakan antara konsep dengan sketsanya, kesalahan dalam membuktikan atau menjelaskan teorema yang dibuat sendiri dan kesalahan menyusun kalimat teorema.

Sebagai saran, pemberian tugas pengajuan masalah perlu diberikan pada mahasiswa jurusan matematika karena dapat melatih mahasiswa memahami informasi

dalam aksioma maupun teorema. Selain itu dapat menunjukkan representasi mahasiswa sendiri dalam memahami struktur deduktif aksiomatik matematika. Di samping itu pengajuan masalah dapat sebagai sarana refleksi maupun evaluasi diri mahasiswa dalam mempelajari struktur matematika. Penelitian tentang masalah ini perlu dilanjutkan yang lebih mendalam untuk mengetahui gejala-gejala yang lengkap.

### DAFTAR PUSTAKA

- Bell, Frederick H. (1981). *Teaching and Learning Mathematics*. Dubuque, Iowa: C.Brown Company Publisher
- Buku Pedoman Unesa, Non Pendidikan 2000-2001* .(2000). Surabaya: Unipress Unesa
- Gemignani, Michael C. (1968). *Basic Concepts of Mathematics and Logic*. Massachussets: Addison Wesley Publishing Co, Inc.
- Hudojo, Herman. (2002). *Representasi Belajar Berbasis Masalah*. Jurnal Matematika atau Pembelajarannya. Edisi khusus. Tahun VIII. Juli 2002. Jurusan Pendidikan matematika FMIPA Universitas Negeri Malang.
- Silver, E. & Cai, J. (1996). *An analysis of Aritmatic Problem Posing by Midlle School Students*. *Journal for Research In Mathematics Education*, V.27, N.5, November 1996, h.521-539
- Sunardi. (2000). *Hubungan tingkat Berpikir siswa dalam Geometri dengan Kemampuan siswa dalam Geometri..* Jurnal matematika atau Pembelajarannya. Tahun VI. No. 2 Agustus 2000. Jurusan Pendidikan matematika FMIPA Universitas Negeri Malang.
- Villers, Michael de (1995). *Problem Posing Variations an fermat's Last theorem*. KZN Mathematics Journal, 16-18 December 1995.  
<http://mzone.mweb.co.za/residents/profind/homepage.html>
- Wallace, Edward C and West, Stepen F.. (1992). *Roads to Geometry*. Englewood Cliff, New Jersey: Prentice Hall